3-1 压强 2021年7月1日10点49分

**单个点处的压强**

压力是每单位面积的压缩力，它给人的印象是一个向量。然而，流体中任何一点的压力在所有方向上都是相同的（图 3-4）。也就是说，它有大小但没有特定的方向，因此它是一个标量。这可以通过考虑处于平衡状态的单位长度（Δy = 1 到页面中）的小楔形流体元素来证明，如图 3-5 所示。三个表面的平均压力为 P1、P2 和 P3，作用在一个表面上的力是平均压力和表面积的乘积。根据牛顿第二定律，x 和 z 方向的力平衡给出，

其中 𝜌 是密度，W = mg = 𝜌 g Δx Δy Δz/2 是流体元素的重量。注意到楔子是一个直角三角形，我们有 Δx = l cos 𝜃 和 Δz = l sin 𝜃 。代入这些几何关系并将方程 3-3a 除以 Δy Δz 和方程 3-3b 除以 Δx Δy 给出方程 3 中的最后一项 -当 Δz → 0 时，4b 消失，楔形变得无穷小，因此流体元素收缩到一个点。然后将这两个关系的结果组合起来，无论角度𝜃。我们可以对 yz 平面中的元素重复分析并获得类似的结果。因此我们得出结论，流体中某一点的压力在所有方向上都具有相同的大小。该结果适用于运动流体以及静止流体，因为压力是标量，而不是矢量。

**压强随深度的变化**

静止流体中的压力在水平方向上不会改变,这对您来说并不奇怪.这可以通过考虑薄的水平流体层并在任何水平方向上进行力平衡来轻松显示.然而,在重力场的垂直方向上情况并非如此.流体中的压力随着深度的增加而增加,因为更多的流体停留在更深的层上,而这种“额外重量”对更深层的影响被压力的增加所抵消(图3-6).

获得压力随深度的变化的关系,考虑一个高度为,长度为和单位深度(进入页面的)的矩形流体单元,如图3-7所示.假设流体𝜌的密度是恒定的,垂直z方向的力平衡给出,

其中 W = mg = 𝜌 g Δx Δy Δz 是流体元素的重量，Δz = z2 z1。除以 Δx Δy 并重新排列，其中 𝛾s = 𝜌 g 是流体的比重。因此，我们得出结论，恒定密度流体中两点之间的压力差与点之间的垂直距离 Δz 和流体的密度 𝜌 成正比。注意负号，静态流体中的压力随深度线性增加。这就是潜水员在湖中潜水更深时的体验。在流体静力学条件下，在同一流体中的任意两点之间更容易记住和应用的公式是“下方”指的是低海拔点（流体中更深处）和“上面”是指海拔较高的点。如果你一直使用这个方程，你应该避免符号错误。对于给定的流体，垂直距离 Δz 有时被用作压力的度量，它被称为压头。我们还从方程 3-6 得出结论，对于小对于中等距离，由于气体密度低，压力随高度的变化可以忽略不计。例如，可以认为装有气体的罐中的压力是均匀的，因为气体的重量太小而无法产生显着差异。此外，充满空气的房间中的压力可以近似为一个常数（图 3-8）。如果我们将“上方”点视为对大气开放的液体的自由表面（图 3- 9)，其中压力为大气压 Patm，则从方程 3-7 自由表面以下深度 h 处的压力变为液体本质上是不可压缩的物质，因此密度随深度的变化可以忽略不计。当海拔变化不是很大时，气体也是这种情况。然而，液体或气体的密度随温度的变化可能很大，并且在需要高精度时可能需要加以考虑。此外，在海洋等很深的地方，由于上面巨大的液体重量压缩，液体密度的变化可能很大。重力加速度 g 从海平面的 9.807 m/s2 变化到9.764 m/s2，海拔 14,000 m，大型客机巡航。在这种极端情况下，这只是 0.4% 的变化。因此，g 可以近似为一个常数，误差可以忽略不计。 对于密度随高度变化显着的流体，压力随高度变化的关系可以通过将方程 3-6 除以 Δz 得到，并取极限为 Δz → 0. 这会产生请注意，当 dz 为正时，dP 为负，因为压力向上减小。当密度随高度的变化已知时，可以通过积分确定任意两点 1 和 2 之间的压力差为 对于恒定密度和恒定重力加速度，正如预期的那样，这种关系简化为公式 3-6。静止流体中的压力与容器的形状或横截面无关。它随垂直距离而变化，但在其他方向上保持不变。因此，在给定流体中，水平面上所有点的压力都相同。荷兰数学家 Simon Stevin (1548-1620) 于 1586 年发表了图 3-10 所示的原理。请注意，A、B、C、D、E、F 和 G 点的压力相同，因为它们处于相同的深度，并且它们通过相同的静态流体相互连接。然而，H 点和 I 点的压力并不相同，因为这两个点不能通过相同的流体相互连接（即，我们不能在始终保持在相同流体中的情况下绘制从 I 点到 H 点的曲线），尽管它们处于相同的深度。 （你能说出哪个点的压力更高吗？）还要注意，流体施加的压力总是在指定点垂直于表面。流体中的压力在水平方向上保持恒定的结果是，施加到受限流体上的压力使压力始终增加相同的量。这被称为帕斯卡定律，以布莱斯·帕斯卡 (Blaise Pascal) (1623–1662) 命名。

3-2 压力测量仪 2021年7月1日14点06分

**压力计**

我们从公式 3-6 中注意到，静止流体中 Δz 的高度变化对应于 ΔP/𝜌 g，这表明流体柱可用于测量压差。基于此原理的设备称为压力计，它通常用于测量小和中等压力差。压力计由一个玻璃或塑料 U 型管组成，其中装有一种或多种流体，例如汞、水、酒精或油（图 3-19）。为了将压力计的尺寸保持在可管理的水平，如果预计会有很大的压力差，则会使用重流体，例如水银。考虑图 3-20 中显示的用于测量罐中压力的压力计。由于气体的重力影响可以忽略不计，罐中任何位置和位置 1 处的压力都具有相同的值。此外，由于流体中的压力在流体内的水平方向上没有变化，因此点 2 处的压力与点 1 处的压力相同，P2 = P1。高度为 h 的微分流体柱处于静平衡状态，向大气开放。然后点 2 处的压力直接从公式 3-7 确定为，

其中 𝜌 是管中压力计流体的密度。请注意，管的横截面积对高度差 h 没有影响，因此对流体施加的压力没有影响。然而，管子的直径应该足够大（超过几毫米）以确保表面张力效应和毛细管上升可以忽略不计。

一些压力计使用倾斜或倾斜的管子，以便在读取流体高度时提高分辨率（精度）。这种装置称为倾斜压力计。许多工程问题和一些压力计涉及堆叠在彼此顶部的多种不同密度的不混溶流体。通过记住（1）高度为 h 的流体柱的压力变化是 ΔP = 𝜌 gh，（2）给定流体中的压力向下增加并向上减小（即 Pbottom > Ptop），可以轻松地分析此类系统，并且(3) 在静止的连续流体中，同一高度上的两点压力相同。

最后一个原理是帕斯卡定律的结果，它允许我们在压力计中从一个液柱“跳跃”到下一个液柱，而无需担心压力变化，只要我们停留在相同的连续流体中并且流体处于静止状态。然后可以通过从已知压力点开始并在我们向感兴趣点前进时添加或减去 𝜌 gh 项来确定任何点的压力。例如，图 3-22 中罐底部的压力可以通过从压力为 Patm 的自由表面开始，向下移动直到到达底部的点 1，并将结果设置为 P1 来确定。它给，

在所有具有相同密度的流体的特殊情况下，这种关系简化为 Patm + 𝜌 g(h1 + h2 + h3) = P1。

由于存在阀门或热交换器等设备或任何流动阻力，压力计特别适合测量两个指定点之间水平流动部分的压降。这是通过将压力计的两条腿连接到这两个点来完成的，如图 3-23 所示。工作流体可以是气体，也可以是液体，其密度为𝜌1。压力计流体的密度为𝜌2，压差流体高度为h。两种流体必须是不混溶的，并且𝜌2必须大于𝜌1。

压力差 P1-P2 的关系可以通过从点 1 开始与 P1 获得，通过添加或减去𝜌 gh 项沿管移动，直到我们到达点 2，并将结果设置为 P2：注意我们从 A 点水平跳到 B 点并忽略了下面的部分，因为这两个点的压力是相同的。简化，注意距离 a 必须包括在分析中，即使它对结果没有影响。此外，当管道中流动的流体是气体时，则 𝜌 1 ≪ 𝜌 2 和公式 3-15 中的关系简化为 P1 P2 ≅ 𝜌 2gh。

**3-4 水下平面表面的静水力** 2021年7月1日17点12分

板(例如大坝中的闸阀,储液罐的壁或静止的船体)暴露于液体时会受到分布在其表面上的流体压力(图 3-27).在平面,静水力形成一个平行力系统,我们经常需要确定力的大小及其作用点,称为**压力中心**.在大多数情况下,板的另一侧对大气开放(例如门的干燥侧),因此大气压力作用在板的两侧,产生零合力.在这种情况下,减去大气压力并仅使用表压是很方便的(图 3-28).例如,在湖底.

考虑完全浸没在液体中的任意形状的平板的顶面,如图3-29及其法线视图所示.该表面的平面(与页面垂直)以角度𝜃与水平自由表面相交,并且我们将相交线带作为x轴(页面外).液体上方的绝对压力为,如果液体对大气开放,则为当地大气压(但如果液体上方的空间被抽真空或加压,则可能与不同).那么板上任意一点的绝对压力为,

其中是点到自由表面的垂直距离,y是点到x轴的距离(图3-29中的点O).作用在表面上的合流体静力是通过对作用在整个表面积上的微分面积上的力进行积分来确定的,

但是面积的一阶矩与质心的y坐标有关(或表面的中心),

代入,得到

其中是表面质心处的压力,等于表面上的平均压力,而是质心与液体的自由表面的垂直距离(图 3-30).因此我们得出结论:

作用在完全浸没在均匀(恒定密度)流体中的板的平面上的合力大小等于表面质心处的压力与表面面积的乘积(图 3-31).

压力通常是大气压,在大多数力计算中可以忽略它,因为它作用于板的两侧.如果不是这种情况,考虑对合力的贡献的一种实用方法是简单地将等效深度添加到;也就是说,假设在具有绝对真空的液体顶部存在额外的厚度为的液体层.

接下来我们需要确定合力的作用线.如果两个平行力系在任意一点上具有相同的大小和相同的力矩,则它们是等效的.合成流体静力的作用线通常不通过表面的质心——它位于压力较高的下方.合力作用线与表面的交点是**压力中心**.作用线的垂直位置是通过将合力力矩与绕轴分布的压力力矩相等来确定的:

或,

其中是压力中心到x轴(图3-31中的O点)的距离,并且是关于x轴的第二面积矩(也称为面积惯性矩).面积的二阶矩在工程手册中广泛用于常见形状,但它们通常是关于穿过面积质心的轴给出的.幸运的是,关于两个平行轴的面积二阶矩通过平行轴定理相互关联,在这种情况下,它表示为,

其中是关于通过区域质心的x轴的面积二阶矩,(质心的y坐标)是两个平行轴之间的距离.将等式3-19中的关系和等式3-21中的关系代入等式3-20,求解得

对于,通常是忽略大气压时的情况,简化为

知道,压力中心到自由表面的垂直距离由确定.

一些公共区域的值在图3-32中给出.对于关于轴对称的区域,压力中心位于质心正下方的y轴上.在这种情况下,压力中心的位置只是垂直对称平面表面上与自由表面相距的点.

压力垂直作用于表面,静水压力作用在平板上 任何形状形成一个体积，它的底是板面积，其长度是线性变化的压力,如图 3-33 所示.这个虚拟压力棱镜有一个有趣的物理解释:它的体积等于作用在板上的合成流体静力的大小,因为,并且该力的作用线穿过这个均质棱镜的质心.质心在板上的投影是压力中心.因此,有了压力棱镜的概念,描述平面上的合流体静力的问题就简化为求这个压力棱镜的体积和质心的两个坐标.

**特例:浸入式矩形板**

考虑一个高度为,宽度为的完全浸没的矩形平板,它与水平面倾斜一个角度𝜃,其顶部边缘是水平的,并且沿着平板的平面与自由表面的距离为.如图3-34a.上表面上的合流体静力等于平均压力,即表面中点的压力乘以表面积A.即,

力作用在垂直距离离自由表面直接在板的质心下方,其中,根据公式3-22a,

当板的上边缘位于自由表面且因此,方程 3-23 简化为,

对于完全浸没的垂直板(𝜃=90°),其顶部边缘是水平的,可以通过设置获得静水压力(图 3-34b),

当作用于板的两侧被忽略时,其顶边为水平且在自由表面的高度为的垂直矩形表面上的静水压力为与板质心正下方的自由表面相距.

水下水平平板上的压力分布是均匀的,其大小为,其中h为水面到自由表面的距离.因此,作用在水平矩形表面上的静水压力为,

它通过板的中点起作用(图3-33c).

**3-5 水下曲面上的静水力** 2021年7月2日11点00分

在许多实际应用中,浸没的表面并不平坦(图3-36).对于浸没的曲面,合成静水压力的确定更为复杂,因为它通常需要对沿曲面改变方向的压力进行积分.由于涉及复杂的形状,在这种情况下压力棱镜的概念也没有多大帮助.

确定作用在二维曲面上的合成静水压力的最简单方法是分别确定水平和垂直分量和.这是通过考虑由曲面和穿过曲面两端的两个平面(一个水平一个垂直)包围的液体块的自由体图来完成的,如图3-37所示.注意,所考虑的液体块的垂直面只是曲面在垂直平面上的投影,水平面是曲面在水平面上的投影.作用在弯曲固体表面上的合力与作用在弯曲液体表面上的力相等且相反(牛顿第三定律).

作用在假想的水平或垂直平面上的力及其作用线可以按照第3-4节中的讨论确定.封闭的液体体积块的重量简单地为,并且它通过该体积的质心向下作用.注意到流体块处于静态平衡,水平和垂直方向上的力平衡给出,

其中总和是矢量加法(即,如果两者作用方向相同,则将幅度相加,如果它们的作用方向相反,则相减).因此,我们得出结论

1. 作用在曲面上的静水压力的水平分量(在大小和作用线上)等于作用在曲面垂直投影上的静水压力.
2. 作用在曲面上的静水压力的垂直分量等于作用在曲面水平投影上的静水力,加上(如果作用在相反方向,则减去)流体块的重量.

作用在曲面上的合流体静力大小为,其与水平面所成角度的切线为.合力作用线的确切位置(例如,它与曲面的端点之一的距离)可以通过在适当的点上取力矩来确定.这些讨论适用于所有曲面,无论它们是在液体上方还是下方.请注意,在液体上方的曲面的情况下,液体的重量会从静水力的垂直分量中减去,因为它们的作用方向相反(图3-38).

当曲面为圆弧(全圆或其任何部分)时,作用在曲面上的合流体静力总是通过圆心.这是因为压力垂直于表面,所有垂直于圆表面的线都通过圆心.因此,压力在中心形成一个并发力系统,在该点可以减少为单个等效力(图3-39).

最后,作用在浸没在不同密度的多层流体中的平面或曲面上的静水压力可以通过将不同流体中表面的不同部分视为不同的表面,找到每个部分上的力,然后添加它们使用向量加法.对于平面,它可以表示为(图 3-40),

其中是流体中表面部分质心处的压力,是该流体中板的面积.这个等效力的作用线可以根据这样的要求来确定,即等效力围绕任何点的力矩等于单个力围绕同一点的力矩之和.

**3-6 浮力和稳定性** 2021年7月2日11点57分

一个物体在液体中比在空气中感觉更轻,重量更轻,这是一种常见的体验.这可以通过使用防水弹簧秤称重水中的重物来轻松证明.此外,由木头或其他轻质材料制成的物体漂浮在水面上.这些和其他观察结果表明,流体会对浸入其中的物体施加向上的力.这种倾向于提升物体的力称为**浮力[buoyant force]**,用表示.

浮力是由流体中的压力随深度增加而引起的.例如,考虑一个厚度为h的平板,它浸没在密度为的液体中,平行于自由表面,如图3-42所示.板的顶(和底)面的面积是A,它到自由表面的距离是s.板顶面和底面的表压分别为和.那么静水压力向下作用在顶面,较大的力向上作用在板底面上.这两个力之间的差值是一个净向上力,即浮力,

其中是板的体积.但是关系只是体积等于板体积的液体的重量.因此,我们得出结论,作用在板上的浮力等于被板排开的液体的重量.对于密度恒定的流体,浮力与物体与自由表面的距离无关.它也与实体的密度无关.

公式3-32中的关系是为简单几何而开发的,但它适用于任何物体,无论其形状如何.这可以通过力平衡在数学上显示,或者简单地通过以下论证:考虑一个任意形状的固体浸没在静止的流体中,并将​​其与同一垂直方向的虚线表示的相同形状的流体进行比较位置(图3-43).作用在这两个物体上的浮力是相同的,因为仅取决于高度的压力分布在两者的边界上是相同的.假想流体处于静态平衡状态,因此作用在其上的净力和净力矩为零.因此,向上的浮力必定等于体积等于固体体积的假想流体体的重量.此外,重量和浮力必须具有相同的作用线才能使力矩为零.这被称为阿基米德原理,以希腊数学家阿基米德(287-212)的名字命名,表示为

作用在浸入流体中的密度均匀的物体上的浮力等于物体排开的流体的重量,并且它通过排开体积的质心向上作用.

对于漂浮的物体,整个物体的重量必须等于浮力,浮力是其体积的流体的重量等于浮体淹没部分的体积.也就是说,

因此,浮体的淹没体积分数等于浮体的平均密度与流体的密度之.请注意,当密度比等于或大于1时,浮体完全淹没.

根据这些讨论,浸入流体中的物体(1)在流体中的任何位置保持静止,当其平均密度等于流体密度时,(2)当其平均密度较大时沉入底部,(3)当物体的平均密度小于流体的密度时,它会上升到流体的表面并漂浮(图3-44).

对于漂浮在液体表面的物体,物体的总重量显然小于它所排开的液体的重量.事实证明,物体体积的一部分被淹没(volume submerged),而其余部分位于液体表面上方.由于系统是静止的,两个垂直力W和必须仍然平衡,

对于已知重量W的物体,我们看到随着液体密度的增加,由于在分母中,因此身体体积的较小百分比被淹没(见图3-45).

浮力与流体的密度成正比,因此我们可能认为空气等气体施加的浮力可以忽略不计.一般情况下确实如此,但也有明显的例外.例如,一个人的体积约为0.1立方米,空气的密度为, 空气对人施加的浮力为

质量80 kg人的重量为.因此,在这种情况下忽略浮力会导致重量误差为0.15%,可以忽略不计.但是气体中的浮力效应支配着一些重要的自然现象,例如在较冷的环境中暖空气上升,从而产生自然对流,热空气或氦气球的上升以及大气中的空气运动.例如,一个氦气球会由于浮力效应而上升,直到它到达空气密度(随高度降低)等于气球中氦气密度的高度——假设此时气球没有爆裂,并忽略气球本身的重量.热气球(图 3-46)的工作原理类似.

阿基米德原理也用于地质学,将大陆视为漂浮在岩浆海中.

**浸入体和浮体的稳定性**

浮力概念的一个重要应用是评估没有外部挂件的浸没和浮体的稳定性.该主题在船舶和潜艇的设计中非常重要(图3-49).在这里,我们提供了一些关于垂直和旋转稳定性的一般定性讨论.

我们使用经典的“球在地板上”的比喻来解释稳定性和不稳定性的基本概念.图3-50中显示的是三个静止在地板上的球.情况(a)是**稳定的**,因为任何小的干扰（有人将球向右或向左移动）都会产生恢复力(由于重力),使其返回到初始位置.情况(b)是**中性稳定[neutrally stable]的**,因为如果有人将球向右或向左移动,它将保持在新位置.它没有回到原来位置的趋势,也不会继续离开.情况(c)是一种情况,此时球可能处于静止状态,但任何扰动,即使是极小的扰动,都会导致球滚下山坡——它不会回到原来的位置;而是与它背道而驰.这种情况是**不稳定的[unstable]**.如果球在倾斜的地板上呢?在这种情况下讨论稳定性是不合适的,因为球不处于平衡状态.换句话说,它不能静止,即使没有任何干扰也会滚下山坡.

对于处于静平衡状态的浸没或漂浮的物体,重力和作用在物体上的浮力相互平衡,这种物体在**垂直方向**上是固有稳定的.如果浸没的中性浮力物体在不可压缩流体中上升或下降到不同深度,该物体将在该位置保持平衡.如果一个浮体在.直力的作用下有所上升或下降,一旦外部影响消失.该物体就会恢复到原来的位置.因此,浮体具有垂直稳定性,而浸入式中性浮体是中性稳定的,因为它在受到扰动后不会回到原来的位置.

浸没物体的**旋转稳定性**取决于物体的重心和**浮心**的相对位置,浮心B是位移体积的质心.如果物体底部较重,则浸入物体是稳定的,因此G点直接位于B点下方(图3-51a).在这种情况下,身体的旋转扰动会产生一个恢复力矩,使身体恢复到原来的稳定位置.因此,潜艇的稳定设计要求发动机和船员舱室位于下半部,以便尽可能将重量转移到底部.热空气或氦气球(可以被视为浸入空气中)也很稳定,因为承载负载的重型笼子位于底部.重心G位于B点正上方的浸没体是不稳定的,任何扰动都会导致该体颠倒(图3-51c).G和B重合的物体是中性稳定的(图3-51b).对于密度始终恒定的物体就是这种情况.对于这样的物体,没有倾覆或纠正自己的倾向.

如果重心未与浮力中心垂直对齐,则如图3-52所示?在这种情况下讨论稳定性是不合适的,因为物体不处于平衡状态.换句话说,它不能静止,即使没有任何扰动,它也会向稳定状态旋转.图3-52所示情况下的恢复力矩是逆时针方向,并导致物体逆时针旋转,从而使G点与B点垂直对齐.请注意,可能会有一些振荡,但最终物体会在其位置稳定下来.稳定的平衡状态[图3-51的情况(a)].图3-52中物体的初始稳定性类似于球在倾斜地板上的稳定性.如果图3-52中的体重位于身体的另一侧,您能预测会发生什么吗?

浮体的旋转稳定性标准是相似的.同样,如果浮体是底部重的,因此重心G直接位于浮心B的正下方,则浮体始终是稳定的.但与浸入体不同,当G直接位于B上方时,浮体可能仍然是稳定的(图3-53).这是因为在旋转扰动期间,位移体积的质心向一侧移动到Bʹ点,而物体的重心G保持不变.如果Bʹ点足够远,这两个力就会产生一个恢复力矩,使物体返回到原来的位置.浮体稳定性的衡量标准是**稳心[metacentric]高度**GM,它是重心G和稳心M之间的距离,即旋转前后通过浮体的浮力作用线的交点.对于最大约20°的小滚转角,对于大多数船体形状来说,超中心可以被认为是一个固定点.典型的元中心高度值对于游轮为0.3-0.7m,对于帆船为0.9-1.5m,对于货船为 0.6-0.9m,对于军舰为0.75-1.3m.如果M点高于G点,则浮体是稳定的,因此GM为正;如果M点低于G点,则浮体不稳定,因此GM为负.在后一种情况下,作用在倾斜物体上的重量和浮力会产生倾覆力矩而不是恢复力矩,从而导致物体倾覆.G上方的稳心高度GM的长度是衡量稳定性的一个指标:它越大.浮体越稳定.

正如已经讨论过的,船可以倾斜到某个最大角度而不会倾覆,但超过该角度它会倾覆(并下沉).我们在漂浮物体的稳定性和沿地板滚动的球的稳定性之间做了最后的类比.即,想象球位于两座山丘之间的低谷中(图3-54).球在受到扰动后返回到其稳定的平衡位置-达到极限.如果扰动幅度太大,球会从山的另一侧滚下,不会回到平衡位置.这种情况被描述为在扰动的某个极限水平之前是稳定的,但在超出的范围内是不稳定的.

**3-7 刚体运动中的流体** 2021年7月2日15点00分

我们在第3-1节中表明,给定点的压力在所有方向上都具有相同的大小,因此它是一个标量函数.在本节中,我们获得了在没有任何剪切应力(即,流体层之间没有相对运动)的情况下,像固体一样运动的流体中压力变化的关系,无论是否有加速度.

许多液体,如牛奶和汽油,都是用油轮运输的.在加速的油轮中,流体冲到后面,并发生一些初始飞溅.但随后会形成一个新的自由表面(通常是非水平的),每个流体粒子都承担相同的加速度,整个流体像刚体一样运动.流体内部不存在剪切应力,因为没有变形,因此没有形状变化.当流体包含在绕轴旋转的罐中时,也会发生流体的刚体运动.

考虑一个在和方向上边长分别为和的微分矩形流体单元,其中轴在垂直方向上向上(图 3-55).注意到微分流体元素表现得像一个刚体,这个元素的牛顿第二运动定律可以表示为,

其中是流体单元的质量,是加速度,是作用在单元上的合力.

作用在流体元素上的力包括物体力,例如作用在整个元件体上的重力,并且与体的体积成正比(还有电和磁力,在本文中将不考虑),以及表面力,例如作用在单元表面并与表面积成正比的压力(剪应力也是表面力,但在这种情况下它们不适用,因为流体单元的相对位置保持不变).当流体元素与其周围环境隔离以进行分析时,会出现表面力,并且分离体的影响被该位置处的力所替代.请注意,压力表示周围流体施加在流体单元上的压缩力.并且始终垂直于表面并向内朝向表面.

取元素中心的压力为,单元顶面和底面的压力可表示为和,分别使用截断的泰勒级数展开(图3-56).注意到作用在表面上的压力等于平均压力乘以表面积,在z方向上作用在元素上的净表面力是作用在底面和顶面的压力之差,

同理,x和y方向的净表面力为

那么作用在整个单元上的表面力(简称压力)可以用向量形式表示为

其中和分别是和方向的单位向量,并且

是压力梯度.请注意,∇或“del”是一个向量算子,用于以向量形式紧凑地表达标量函数的梯度.此外,标量函数的梯度在给定方向上表示,因此它是一个向量.

作用在流体元素上的唯一物体力是作用在负方向的元素的重量,它表示为或向量形式为,

则作用在元素上的总合力变为

代入牛顿第二运动定律,并消去,作为刚体(无剪切应力)的流体的一般运动方程被确定为

将向量分解为它们的分量,这种关系可以更明确地表示为

或者,在三个正交方向的标量形式为,

其中和分别是和方向的加速度.

**特例1: 静止流体**

对于静止或匀速直线运动的流体,加速度的所有分量都为零,方程3-43中的关系简化为

在静止的流体中,压力在任何水平方向上保持恒定(P与x和y无关)并且仅在垂直方向上因重力而变化[因此P=P(z)].这些关系适用于可压缩和不可压缩流体(图3-57).

**特例2: 自由下落的流体**

自由下落的物体在重力的影响下加速.当空气阻力可以忽略不计时,物体的加速度等于重力加速度,任何水平方向的加速度为零.因此,和.然后加速流体的运动方程(方程3-43)简化为

因此,在与流体一起运动的参考系中,它的行为就像在零重力环境中一样.(顺便说一下,这是轨道飞行器中的情况.尽管很多人认为,那里的重力并不为零!)此外,自由落体中一滴液体的表压始终为零.(实际上,由于表面张力,表压略高于零,这使液滴保持完整.)

当运动方向反转并且通过将流体容器置于迫使流体垂直加速时由火箭发动机向上推动的电梯或航天器,z方向的压力梯度为.因此,相对于静止流体情况,流体层的压力差现在加倍(图3-58).

**直线加速**

考虑一个部分装满液体的容器.容器以恒定加速度沿直线运动.我们取运动轨迹在水平面上的投影为x轴,垂直平面上的投影为z轴,如图3-59所示.加速度的x和z分量是和.在y方向上没有运动,因此该方向上的加速度为零,.然后加速流体的运动方程(方程3-43)简化为,

因此,压力与y无关.则总微分为,即,变为

对于,流体中两点1和2之间的压差由积分确定为,

以点1为原点(x=0,z=0),其中压力为,点2为流体中的任意一点(无下标),该点的压力表示为

垂直上升(或下降)点2相对于点1的自由表面的大小通过选择自由表面上的1和2来确定(使),并求解方程3-48的(图3-60),

其中是液体自由表面的z坐标.恒压表面方程称为**等压线[isobars]**,通过设置并将替换为,即表面的z坐标(垂直距离)作为x的函数,从方程3-47中获得.它给出

从而我们得出结论,在线性运动中具有恒定加速度的不可压缩流体中的等压线(包括自由表面)是平行表面,其在平面上的斜率是

显然,这样的自由表面流体是平面,除非(加速度仅在垂直方向),否则它是倾斜的.此外,质量守恒以及不可压缩性假设(𝜌 =常数)要求流体的体积在加速之前和期间保持不变.因此,一侧液位的上升必须通过另一侧液位的下降来平衡.无论容器的形状如何,只要液体在整个容器中是连续的,这都是正确的(图3-61).

**在圆柱形容器中旋转**

我们从经验中知道,当装满水的玻璃杯绕其轴旋转时,由于所谓的离心力(但用向心加速度更恰当地解释),流体被迫向外,自由表面液体变成凹面.这被称为**强制涡旋运动[forced vortex motion**].

考虑一个部分装满液体的垂直圆柱形容器.容器现在以恒定角速度绕其轴旋转,如图3-63所示.在初始瞬变之后,液体将作为刚体与容器一起运动.没有变形,也就没有剪切应力,容器中的每个流体粒子都以相同的角速度运动.

这个问题最好在圆柱坐标中分析,z取自容器底部指向自由表面的中心线,因为容器的形状是圆柱体,流体粒子经过圆周运动.在距旋转轴处以恒定角速度旋转的流体粒子的向心加速度为,并且径向指向旋转轴(负方向).即,.z轴对称,即旋转轴,因此不存在𝜃相关性.那么和.此外,由于z方向上没有运动,.

则加速流体的运动方程(方程3-41)简化为,

则的总微分,也就是,变为

通过设置并将z替换为,即表面的z值(垂直距离)作为的函数,可以获得恒压表面的方程.它给出

两边同时对积分,恒压面的方程确定为

这是抛物线方程.因此我们得出结论,恒压表面,包括自由表面,是旋转抛物面(图3-64).

对于不同的恒压抛物体(即不同的等压线),积分常数的值是不同的.对于自由表面,在公式3-56中设得到,其中是自由表面沿旋转轴距容器底部的距离(图 3-63).则自由表面的方程变为,

其中是自由表面到容器底部半径为的距离.此分析中的基本假设是容器中有足够的液体，因此整个底面仍被液体覆盖.

半径为r,高度为,厚度为的圆柱壳单元的体积为.那么自由表面形成的抛物面的体积是,

由于质量守恒且密度不变,因此该体积必须等于容器中流体的原始体积,即,

其中是容器中没有旋转的流体的原始高度.使这两个体积彼此相等,流体沿圆柱形容器中心线的高度变为,

那么自由表面的方程变为,

抛物面形状与流体性质无关,因此相同的自由表面方程适用于任何液体.例如,旋转的液态汞形成一个抛物面镜,在天文学中很有用(图3-65).

最大垂直高度出现在r=R的边缘处,边缘和自由表面中心之间的最大高度差通过在r=R和r=0处计算并取它们的差来确定,

当时,流体中两点1和2之间的压差由积分确定.这产生,

以点1为原点(),其中压力为,点2为流体中的任意点(无下标),该点的压力表示为,

请注意,在固定半径处,压力在垂直方向上发生流体静力学变化,就像在静止流体中一样.对于固定的垂直距离,压力随径向距离的平方变化,从中心线向外边缘增加.在任何水平面上,半径为R的容器的中心与边缘之间的压力差为.